SUR LA BEAUTÉ EN MATHÉMATIQUE

BENJAMIN GOURBAKI

Bien sûr que les mathématiques sont belles ; sinon, pourquoi se donnerait-on la peine d'en faire ? Certains répondraient : parce qu'elles sont *utiles*... Vrai, mais ne laissons pas ce pragmatisme et cette *déraisonnable efficacité* nous gâcher le plaisir et la profonde satisfaction intellectuelle que peuvent procurer l'étude des structures abstraites et des relations entre celles-ci. Après tout, la poésie aussi a une certaine utilité, mais ce n'est pas celle-ci qui enflamme le poète, ni qui motive l'amateur savourant des vers le soir au coin du feu.

Cette beauté est avant tout sensuelle : celle de l'ardoise noircie de formules sous son léger voile de poussière blanche, de la typographie et l'agencement des symboles sur la page, de l'odeur du traité déniché au détour d'un rayon, foisonnant de trésors endormis dans le grain de la page. Mais la vraie beauté mathématique, comme celle de toute forme d'art, demande un certain investissement de la part de qui souhaite l'apprécier : il n'est de vraie contemplation qui ne soit profondément *active*. J'aime voir cette beauté par-dessus l'épaule de l'enfant s'émerveillant de voir le sculpteur révéler le magnifique cheval caché au cœur du bloc de marbre. La mathématique n'est-elle pas ce bloc de marbre que l'homme lui-même doit sculpter pour en révéler les splendeurs ?

Parmi ces théories belles comme des rêves de pierre, l'une des plus profondément satisfaisantes, de par son élégance et la portée de ses implications, est la branche de l'algèbre appelée *théorie des groupes*. Par un amusant télescopage autoréférentiel, les groupes sont précisément des outils permettant d'aider à comprendre, voire mesurer, la beauté des formes (au sens platonicien du terme) *via* l'étude de leurs symétries.

Ainsi, un carré peut-il être *objectivement* jugé plus beau qu'un rectangle quelconque, car il présente, en plus de ses quatre axes de symétries, une invariance par rotations de 90°. De ce point de vue, la plus belle des figures planes demeure incontestablement le cercle, qui possède une infinité de symétries : celui-ci demeure inchangé si on le fait tourner d'un angle quelconque, ou si on lui fait subir une réflexion par rapport à n'importe lequel de ses diamètres. Le cercle est également beau en ce qu'il admet une description particulièrement simple et élégante : l'ensemble des points du plan dont les coordonnées satisfont l'équation

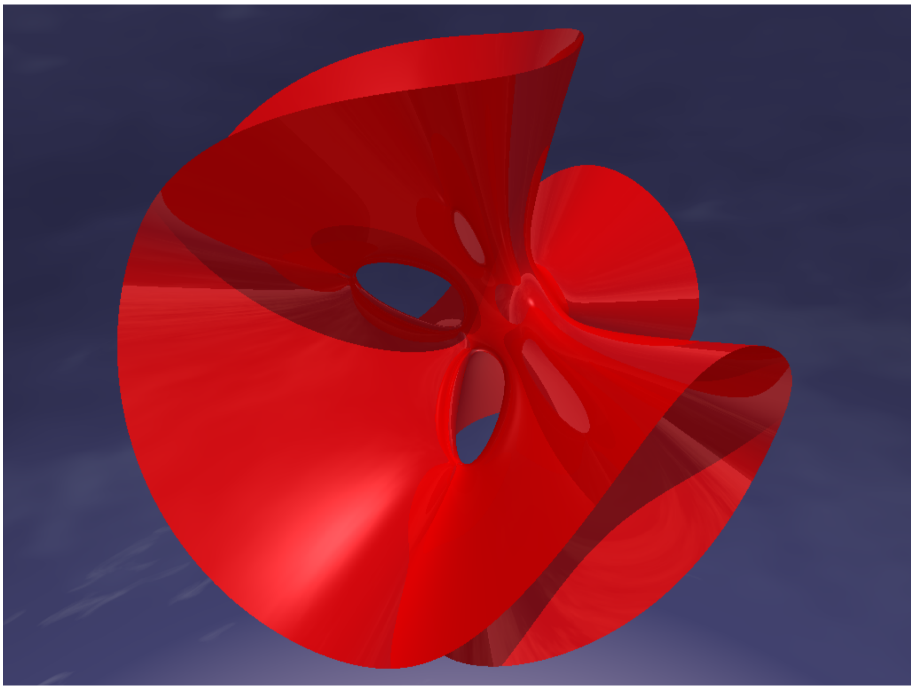
$$x^2 + y^2 = 1.$$

J'aimerais vous présenter un autre objet mathématique que je trouve personnellement extrêmement beau : il s'agit de la *surface de Clebsch*, définie dans l'espace tridimensionnel comme l'ensemble des solutions à l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 + 1 = (x + y + z + 1)^3,$$

qui possède 120 symétries (du moins lorsqu'on la considère, comme il se doit, comme une surface dans l'*espace projectif*) et qui a acquis une certaine notoriété chez les géomètres en raison du fait que l'on peut tracer 27 droites à sa surface (ce qui n'est pas évident de prime abord).

B. Gourbaki est un collectif de mathématiciens (incluant notamment G. H. Hardy, R. W. Hamming, C. Beaudelaire, H. Weyl, É. Galois, F. Klein, B. Parent, ...) dont certaines des idées sont exprimées ici et pour lequel G. Chênevert officie en tant que rédacteur principal.



La surface de Clebsch (figure réalisée avec POV-Ray)

On pourrait également citer la *quartique de Klein*, définie par l'équation

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0,$$

qu'on peut considérer 1,4 fois plus belle car elle possède pour sa part 168 symétries (du moins lorsqu'on en considère, comme il se doit, les solutions complexes) – et dont une représentation en marbre orne d'ailleurs le terrain du *Mathematical Sciences Research Institute* à Berkeley.

The Eightfold Way, représentation artistique de la quartique de Klein

Détails bonus

Voici quelques éléments permettant au lecteur intéressé (que je salue au passage) de donner un sens précis aux affirmations de la seconde partie du texte. Une certaine familiarité avec le langage de la théorie des groupes est toutefois supposée.

1. **Symétries des figures planes.** Rappelons que toute isométrie du plan peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

où A est une matrice orthogonale 2×2 (représentant une rotation si dét $A = +1$, une réflexion si dét $A = -1$) et $\mathbf{b}$ un vecteur de translation.

Si $\mathcal{X}_n$ désigne un n-gone régulier centré à l'origine de $\mathbf{R}^2$, par exemple

$$\mathcal{X}_n = \left\{ \left(\cos \frac{2k\pi}{n},\, \sin \frac{2k\pi}{n} \right) \;\middle|\; k = 0,\, \ldots,\, n-1 \right\},$$

l'ensemble des isométries laissant $\mathcal{X}_n$ globalement invariant est le *groupe diédral*

$$\mathcal{D}_n = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \frac{2k\pi}{n} & \mp \sin \frac{2k\pi}{n} \\ \sin \frac{2k\pi}{n} & \pm \cos \frac{2k\pi}{n} \end{bmatrix} \;\middle|\; k = 0,\, \ldots,\, n-1 \right\}$$

contenant n rotations et n réflexions. Ainsi, le groupe des symétries d'un carré $\mathcal{X}_4$ est le groupe $\mathcal{D}_4$ à 8 éléments, tandis qu'un rectangle non carré ne possède que les 4 symétries $\mathcal{D}_2$ d'un digone (*i.e.*, un segment).

Le cercle $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ possède pour sa part comme symétries le « groupe diédral infini » formé de toutes les matrices ortohogales :

$$\mathcal{O}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & \mp \sin\theta \\ \sin\theta & \pm \cos\theta \end{bmatrix} \;\middle|\; 0 \leq \theta < 2\pi \right\}.$$

2. **Surface de Clebsch.** La façon naturelle de décrire celle-ci est comme une surface $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{R}^4$ définie par le système d'équations

$$x^3 + y^3 + z^3 + w^3 + 1 = x + y + z + w + 1 = 0;$$

en éliminant w dans celles-ci, on retrouve l'équation pour x, y, z donnée dans le corps du texte. Cette nouvelle formulation met en évidence 24 symétries, provenant des $4! = 24$ façons de permuter les quatre variables x, y, z, w entre elles. Par exemple, la symétrie interchangeant x et w, qui s'écrirait dans $\mathbf{R}^3$

$$(x,\, y,\, z) \mapsto (-1 - x - y - z,\, y,\, z).$$

Comme mentionné dans le texte, pour obtenir les 96 symétries manquantes, on doit ajouter à $\mathcal{C}$ des *points à l'infini* permettant de la compléter en une surface projective. Techniquement, cela se fait en introduisant une cinquième coordonnée t et à considérer que deux quintuplets (x, y, z, w, t) et (x', y', z', w', t') définissent le même point lorsqu'ils ne diffèrent que d'une constante multiplicative (non nulle) :

$$x' = \lambda x,\; y' = \lambda y,\; z' = \lambda z,\; w' = \lambda w,\; t' = \lambda t;$$

on écrit alors

$$(x : y : z : w : t) = (x' : y' : z' : w' : t').$$

L'ensemble des points ainsi décrits en *coordonnées homogènes* constitue l'*espace projectif* quadridimensionnel $\mathbf{RP}^4$, contenant $\mathbf{R}^4$ comme l'ensemble des points pour lesquels $t = 1$. Ainsi on a envie (et raison) de considérer la description de $\mathcal{C}$ donnée plus haut comme l'intersection avec $\mathbf{R}^4$ d'une surface projective $\widetilde{\mathcal{C}}$ donnée en coordonnées homogènes par le système d'équations

$$x^3 + y^3 + z^3 + w^3 + t^3 = x + y + z + w + t = 0$$

pour laquelle on voit bien les $120 = 5!$ symétries obtenues par permutation des coordonnées ; le groupe des symétries est ici le groupe symétrique $\mathcal{S}_5$.

Notons qu'on peut voir celles-ci directement sur $\mathcal{C}$, bien que ce soit moins naturel, comme des transformations rationnelles. Par exemple, la permutation échangeant x et t correspond à la substitution

$$(x,\, y,\, z,\, w) \mapsto \left(\frac{1}{x},\, \frac{y}{x},\, \frac{z}{x},\, \frac{w}{x}\right)$$

(possédant toutefois des problèmes sur $\mathcal{C}$ là où $x = 0$: ces points sont envoyés ≪ à l'infini ≫ d'une façon que les coordonnées homogènes permettent de rendre précise).

3. **Quartique de Klein.** Il faut cette fois voir l'équation donnée comme celle d'une *courbe* $\mathcal{K}$ dans le plan projectif $\mathbf{RP}^2$. Ceci dit, on ne lui voit alors (même en tenant compte des points à l'infini) que 6 symétries, à savoir celles correspondant aux permutations cycliques des coordonnées :

$$(x : y : z) \overset{\sigma}{\mapsto} (y : z : x) \mapsto (z : x : y) \mapsto (x : y : z)$$

ainsi que leur composition avec la transformation donnée matriciellement par

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \overset{f}{\mapsto} \frac{-2}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} \sin\frac{2\pi}{7} & \sin\frac{4\pi}{7} & \sin\frac{8\pi}{7} \\ \sin\frac{4\pi}{7} & \sin\frac{8\pi}{7} & \sin\frac{2\pi}{7} \\ \sin\frac{8\pi}{7} & \sin\frac{2\pi}{7} & \sin\frac{4\pi}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

(Le lecteur intéressé dont la curiosité a été piquée reconnaîtra peut-être (?) quelque chose ressemblant à une transformée de Fourier ; en effet, il s'agit précisément de la forme que celle-ci prendrait sur l'ensemble des fonctions *impaires* $\mathbf{F}_7 \to \mathbf{C}$ définies sur le corps à 7 éléments. . .)

Pour voir les 162 autres symétries, on doit adopter un point de vue complexe et considérer $\mathcal{K}$ comme la partie *réelle* de l'ensemble $\widetilde{\mathcal{K}}$ des solutions à l'équation donnée dans l'espace projectif complexe $\mathbf{CP}^2$. En posant $\zeta = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$ (nombre complexe satisfaisant $\zeta^7 = 1$), on arrive alors à écrire d'autres symétries de $\widetilde{\mathcal{K}}$, notamment

$$(x : y : z) \overset{h}{\mapsto} (\zeta x : \zeta^4 y : \zeta^2 z).$$

On peut finalement vérifier que, par composition de σ, h et f, on obtient un total de 168 transformations qui agissent comme des symétries de $\widetilde{\mathcal{K}}$ (calcul aisé à réaliser à l'aide d'un ordinateur). Le groupe G de ces symétries, appelé $\mathrm{PSL}(2,7)$, est célèbre comme étant ≪ le plus petit groupe simple de type Lie ≫ ; on peut par ailleurs montrer (borne d'Hurwitz) que 168 est le nombre maximal de symétries que peut posséder une telle courbe définie par un polynôme de degré 4.

Quelques pistes facilement consultables pour aller plus loin :

Références

[1] R. W. Hamming, *The unreasonable effectiveness of mathematics*, Amer. Math. Monthly, vol. 82, n° 2, février 1980.

[2] G. H. Hardy, *A mathematician's apology*, Cambridge University Press, 1940.

[3] S. Levi (ed.), *The Eightfold Way : The beauty of Klein's quartic curve*, Cambridge University Press, 1999.

[4] J.-P. Serre, *Groupes finis*, notes d'un cours donné à l'ÉNS 1978/1979.

[5] H. Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press, 1952.